# 新微积分

## 第一部分：单一变量的求导

作者：John Gabriel

## 摘要

新的微积分不会应用到被错误定义的极限的概念、不存在的无穷小以及“无限”的概念。在新微积分里所提及的概念都是能被合理解释的，例如数、相切的事物。解析几何是新微积分的根基。虽然这部分摘要只跟单一变量微积分的求导有关，但是微积分里包括了多变量和向量的微积分（求导和反导）。这些都是超过这篇摘要的范围的。由于新微积分的理论建立在合理解释的概念之上，所以它并不会产生主流数学中的那些模棱两可、相互矛盾的东西。新微积分将是人类历史上第一个也是唯一严格构想的微积分。

## 介绍

新微积分中应用的数都是有理数或者类似$\pi, \sqrt{2}, e$这样的无理数的有理化估值。数的概念源于欧几里得几何学：

1. 量是一种对于大小、范围、程度的评估。
2. 量的比值是两个量级之间的比较，写作 $m:n$ （读作 m 比 n）其中 m 和 n 是量。只有当量与量相关时，他们之间性质上的测量才是有可能的。例如，如果我们知道 m 和 n 不等，那么我们可以推断出其中一个大于或者小于另一个。但是我们并不能得到一个比另一个大多少，或者是小多少。这就是性质上的三分法。
3. 如果某两个量能被同一个量测量出来，那么我们说这两个量是可同量的（commeasurable）
4. 两个相同量的比值被称之为一个单位，当一单位出现时，性质测量就是可能的了。
5. 由一单位或者部分单位测量的某个量被称之为数。如果 u 代表单位（unit）k/u 是一个数，那么我们说 k 是被单位 u 测量的。
6. 数和数之间的比值都是分数。如果 p 和 q 是两个数，那么 p/q 和 q/p 都是分数。

## 割线理论

割线法是从割线理论中得到的，然后形成了单一变量求导的核心内容。为了更好地了解微积分，了解不同维度中相切的事物是基础。在单一变量的微积分中，基本的相切事物是梯形。它不平行的那组边被用作于梯度的测量，是一个变量。三维的相切事物是梯形的圆筒。它运动的部分是一个圆盘，被用于测量普通的向量。四维的相切事物是一个球。

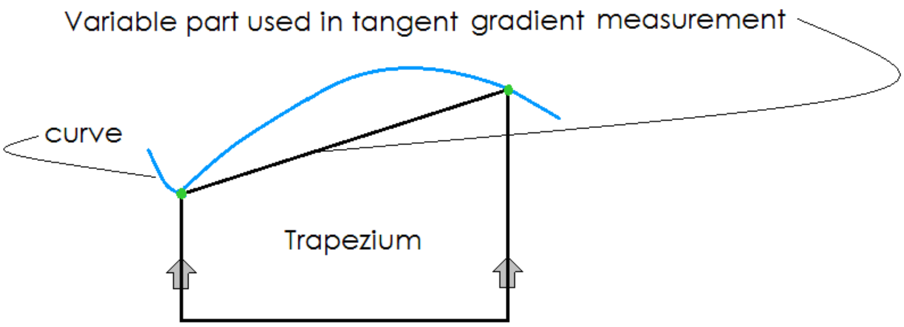


Fig. 1

鉴于在这部分我们只讨论单一变量的微积分，我们会将注意力集中在用于平面曲线的梯形上。变化的边被设定和某一条给定的切线相互平行。那条变化的边和曲线的交点就会有两个或者是无数个。当这条线的图像是一个有着固定梯度的直线的时候，后者（有无数个交点）是成立的。如果这条线的图像不是一条直线，那么那两个交点的纵坐标差就是有限差（finite difference）的分子。而他们对应的横坐标的差值即是有限差的分母。设定分母不为零，那么这个比值即是这段曲线的斜率的值。

割线理论就是一条光滑连续的曲线上，会存在一条切线平行于给定的割线。

设定某一个函数 $f$ 在 $x=c$ 的位置有一条切线，斜率是 $k$ 。而与这条切线平行的某一条割线和这个函数的交点的纵坐标差值为 $k(m+n)$，根据斜率的计算方法，这条割线的斜率是：$k(m+n):(m+n)$ 。因此，纵坐标的差值对于横坐标的差值是可除的。换句话说，横坐标的差值 $(m+n)$ 会是纵坐标差值 $f(c+n)-f(c-m)$ 的一个因数。这样一个结论是非常容易证明的。见图二，函数 $f$ 是一个在包含有 $x=c$ 的区间（即 $(c-m,c+n)$ ）是连续、光滑的。

有无数对的 $f(c+p)$ 和 $f(c-q)$ 可以满足 $\dfrac{f(c+p)-f(c-q)}{p+q}=k$

从以上的理论中，我们可以通过割线法来确定平面曲线中某一条切线的斜率，在函数 $f$ 中 $x=c$ （写作 $f'(c)$ ）处有：

$$f'(c)=\frac{f(c+n)-f(c-m)}{m+n} \qquad [G]$$

其中 $m$ 和 $n$ 是切点和两个割点的相对距离。在下一个章节我们将论述先对距离的性质。

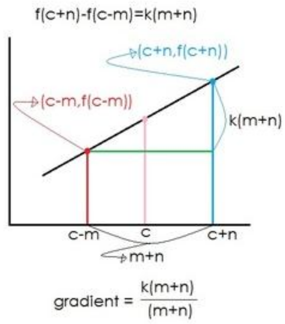



Fig. 2

**证明$\boldsymbol{m+n}$恒是 $\boldsymbol{f(c+n)-f(c-m)}$的一个因数：**
令$s(x) = kx + r$是某条与曲线在 **c** 点切线平行的割线方程。那么割线的两个割点

$(c-m, f(c-m))$和$(c+n, f(c+n)$的有限差$\frac{f(c+n)-f(c-m)}{m+n}$就可以展开成：

$$\frac{k(c+n)+r-[k(c-m)+r]}{m+n} = \frac{kc+kn+r-kc+km-r}{m+n} = \frac{k(m+n)}{m+n} = k$$

因此，$m+n$恒是$f(c+n)-f(c-m)$的一个因数。

## 梯度（gradient）的基本理论

割线理论提供了一个可靠的方法（并没有使用到极限）。这个方法可以计算一条连续且光滑的函数的切线斜率。(或者说，对这个函数求导）

运用割线法，我们可以找到无数对满足[G]的$(m,n)$，但是如果一个函数的图像是一条直线，

那么 $m$ 和 $n$ 之间就不存在数量关系。因为梯度是一个用来表示直线重要性质的比例。它表示的即是这条直线的斜率。

寻找某个非线性函数的切线斜率的过程中包含了很多可以用来认知 ***m*** 和 ***n*** 之间关系（即这两段距离之间的关系）的信息。但是尽管如此，切线的斜率仍然跟 ***m*** 和 ***n*** 的取值无关。通过举例，我们可以很好地了解这些。

例 1：

a） 找到函数 $f(x)=x^2$ 在 $x=c$ 时的切线斜率

b） 确定 $x=c$ 时两段距离之间的关系。

c） 找出三组满足关系的距离

d） 当 $c=3$ 时，求出三组实际数字的能够满足距离关系的值。找到每一组平行于已知切线的割线的斜率。

解：

a) $$f'(c)=\frac{f(c+n)-f(c-m)}{m+n}=\frac{(c+n)^2-(c-m)^2}{m+n}=\frac{c^2+2cn+n^2-(c^2-2cm+m^2)}{m+n}$$

$f'(c)=\dfrac{2cn+2cm+n^2-m^2}{m+n}=\dfrac{2c(m+n)+(n-m)(m+n)}{m+n}=2c+(n-m)$ 因此，

函数 $f(x)=x^2$ 在 ***x=c*** 处的切线斜率是 $2c+(n-m)$

b) 我们知道 $(0,0)$ 是一对满足关系的（***m，n***），因此将其带入上式得 $2c+(0-0)=2c$，我们就可以得到 ***m*** 和 ***n*** 之间的关系是 $n-m=0\rightarrow n=m$ 了。

c) 三组符号表示的（***m，n***）分别是 $(k,k)$，$(k+r,k+r)$ 和 $(k+s,k+s)$。你可以证明通过把这三组数据带入 $2c+(n-m)$ 来证明有效性。当这个式子的结果等于 $2c$ 时，那么这对（***m，n***）是有效的。

d) 令 $k=\dfrac{1}{4}$，$r=\dfrac{1}{4}$ 和 $s=\dfrac{3}{4}$。这些取值并不存在特殊性，但是每一对到常数 ***c*** 的距离必须相等。例如以上的三组（***m，n***）分别是：$(m,n)=\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$，$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 和 $(1,1)$。已知 $c=3$，我们可以得到 $(m_x,n_x)=\left(\dfrac{11}{4},\dfrac{13}{4}\right)$，$\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{7}{2}\right)$ 和 $(2,4)$。到这里，我们已经有足够的条件求出这三条割线两端的坐标和割线的斜率了。

$s_1$: $\left(\dfrac{11}{4},\dfrac{121}{16}\right)$ 和 $\left(\dfrac{13}{4},\dfrac{169}{16}\right)$ 斜率 $s_1$: $\dfrac{\frac{169-121}{16}}{\frac{13-11}{4}}=\dfrac{\frac{48}{16}}{\frac{2}{4}}=\dfrac{48}{8}=6$

$s_2$: $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{25}{4}\right)$ 和 $\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{49}{4}\right)$ 斜率 $s_2$: $\dfrac{\frac{49-25}{4}}{\frac{7-5}{2}}=\dfrac{\frac{24}{4}}{\frac{2}{2}}=\dfrac{6}{1}=6$

$s_3$: $(2,4)$ 和 $(4,16)$ 斜率 $s_3$: $\dfrac{16-4}{4-2}=\dfrac{12}{2}=6$

因此，每一组割线的（m，n）对和方程就依次是：

$\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$ : $s_1(x)=6x-\dfrac{143}{16}\quad\rightarrow s_1(x)=6x-8.9375$

$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ : $s_2(x)=6x-\dfrac{35}{4}\quad\rightarrow s_2(x)=6x-8.75$

$(1,1)$ : $s_3(x)=6x-8$

切线的（m，n）对和切线方程就是：$(0,0)$ : $t(x)=6x-9$

之前的例子致力于帮助大家更好地理解 m 和 n 这两段距离的关系，并且熟练对割线法的应用。

## 更进一步的举例

1、用上文所述的新微积分割线法对函数 $f(x)=\sin(x)$ 求导。

解：正弦函数的数列表达：$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$

$$f'(c)=\frac{f(c+n)-f(c-m)}{m+n}=\frac{\sin(c+n)-\sin(c-m)}{m+n}$$

$$f'(c)=\frac{\sin(c+n)-\sin(c-m)}{m+n}=\frac{\left[c+n-\frac{(c+n)^3}{3!}+\frac{(c+n)^5}{5!}-\right]-\left[c-m-\frac{(c-m)^3}{3!}+\frac{(c-m)^5}{5!}-\right]}{m+n}$$

$$f'(c)=\frac{\sin(c+n)-\sin(c-m)}{m+n}=\frac{m+n+\left[-\frac{(c+n)^3}{3!}+\frac{(c+n)^5}{5!}-\ldots+\frac{(c-m)^3}{3!}-\frac{(c-m)^5}{5!}+\right]}{m+n}$$

观察到分子可以被 $m+n$ 除尽，简化并且丢掉所有含有 ***m*** 和 ***n*** 的项，得到：

$$f'(c)=\frac{\sin(c+n)-\sin(c-m)}{m+n}=1-\frac{c^2}{2!}+\frac{c^4}{4!}-\frac{c^6}{6!}+..$$

$$\therefore f'(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots=\cos(x)$$

2、在三次函数 ***f***（***x***）=***x***^3 上，找到 m 和 n 之间的关系。并应用这个关系找到 c=6，m=12 时，n 是多少。

解：$$f'(c)=\frac{f(c+n)-f(c-m)}{m+n}=\frac{(c+n)^3-(c-m)^3}{m+n}$$

$$f'(c)=\frac{3c^2n+3cn^2+n^3+3c^2m-3cm^2+m^3}{m+n}$$

$$f'(c)=\frac{3c^2(m+n)+3c(n^2-m^2)+(n^3+m^3)}{m+n}$$

$$f'(c)=\frac{3c^2(m+n)+3c(n-m)(m+n)+(m^2-mn+n^2)(m+n)}{m+n}$$

$$f'(c)=3c^2+3c(n-m)+m^2-mn+n^2$$

通过把 m 和 n 值设定为 0，找到 m 和 n 的关系式：

$$3c(n-m)+m^2-mn+n^2=0$$

$$\to m^2-(3c+n)m=-n^2-3cn$$

$$\to m^2-(3c+n)m+\frac{(3c+n)^2}{4}=-n^2-3cn+\frac{(3c+n)^2}{4}$$

$$\to \left(m-\frac{(3c+n)}{2}\right)^2=\frac{-4n^2-12cn+(3c+n)^2}{4}$$

$$\to \left(m-\frac{(3c+n)}{2}\right)^2=\frac{-4n(3c+n)+(3c+n)^2}{4}$$

$$\to \left(m-\frac{(3c+n)}{2}\right)^2=\frac{(3c+n)(3c-3n)}{4}$$

$$\to m-\frac{(3c+n)}{2}=\frac{\pm\sqrt{(3c+n)(3c-3n)}}{2}$$

$$\to m=\frac{3c+n\pm\sqrt{(3c+n)(3c-3n)}}{2}$$

题目已知 c=6，m=12，显而易见 m 和 n 的关系式是：$m=\dfrac{3c+n}{2}$

因此，将 c 和 m 的值带入上式，可以求出：

$$n=2m-3c=2(12)-3(6)=6$$

并且，我们可以得出以下的关系式，找到任意的（m，n）对：

$$3c(n-m)+m^2-mn+n^2=0$$

3、 用新微积分证明 $f(x)=ax^n$ 的导数是 $f'(x)=anx^{n-1}$ 。

这一题可以运用二项式定理将 $f(x)=ax^n$ 展开，然后再用新微积分中的有限差率（finite difference ratio）就可以求出答案。

4、 选择一个任意的函数，应用新微积分对其进行求导。如果是我，我会选择 $f(x)=e^x$，那么这个函数的求导过程就是：

$$f'(x)=\frac{e^{x+n}-e^{x-m}}{m+n}=\frac{\left[1+(x+n)+\frac{(x+n)^2}{2!}+\frac{(x+n)^3}{3!}+\ldots\right]-\left[1+(x-m)+\frac{(x-m)^2}{2!}+\frac{(x-m)^3}{3!}+\ldots\right]}{m+n}$$

$$f'(x)=\frac{(m+n)+\frac{2x(m+n)+n^2-m^2}{2!}+\ldots}{m+n}=\frac{(m+n)+x(m+n)+\frac{(n-m)(m+n)}{2!}+\ldots}{m+n}$$

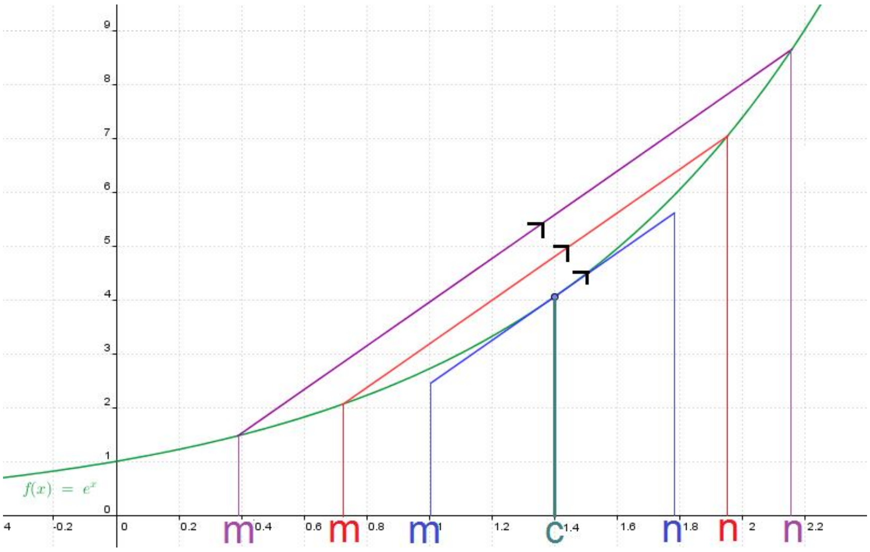
$$f'(x)=1+x+\frac{(n-m)}{2!}+\ldots$$

由于所有项的和中带有 m 和 n 的项都必须是 0，因此原式被化简为：

$$f'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

也就是 $f(x)=e^x$ 的导函数。

5、 在下面的图片中，红色和紫色的割线与蓝色的切线相互平行。




在区间 $(m;n)$ 上有无数条割线和已知切线平行。在自然对数的指数函数中存在这样一个十分有趣的性质：存在无数对距离对 $(m;n)$，且每一对 $(m;n)$ 都可以满足任意 c 值的 $f'(c)=\dfrac{f(c+n)-f(c-m)}{m+n}$。

a） 找到一组 m 和 n 之间的代数关系。

b） 运用迭代法，求出至少一对 $(m;n)$ 距离对

c） 证明这组距离对适用于自然对数的指数函数上每一个点的导数。

解：

a） 根据新微积分对于求导的定义： $f'(c)=\frac{e^{c+n}-e^{c-m}}{m+n}$ 当 $f(x)=e^x$

我们可以在不使用微积分的情况下知道这个数列的导数是： $f'(x)=e^x$，因此 $f'(c)=e^c$。

所以有： $e^c=\frac{e^{c+n}-e^{c-m}}{m+n}$

$\rightarrow e^{c+n}-e^{c-m}=e^c(m+n)$

$\rightarrow e^n-e^{-m}=m+n$

$\rightarrow e^n-n=m+e^{-m}$

此时，我们需要找到一组 m 和 n 的代数关系。之前提到的等式在新微积分中被称为关系式。关系式将 m、n、c 三者联系到一起。但是，由 $f(x)=e^x$ 的商差构成的关系式和 c 的取值并不存在关系。另外， $f(x)=\ln x$ 的关系式并不难计算： $\frac{c+n}{c-m}=e^{\frac{m+n}{c}}$

b） 选择一个 n 值，并利用迭代法找到与之相关的 m 值。

$e^n-n=m+e^{-m}\rightarrow m+e^{-m}=e^n-n$

设定 n=1

$\rightarrow m+e^{-m}=e^1-1\rightarrow m=e^1-1-e^{-m}$

先猜想 m 等于 1。（$e=2.718268$）

$\rightarrow m_1=e^1-1-e^{-1}=1.350386$

$\rightarrow m_2=e^1-1-e^{-1.350386}=1.459126$

$\rightarrow m_3=e^1-1-e^{-1.459126}=1.485827$

$\rightarrow m_4=e^1-1-e^{-1.485827}=1.491951$

$\rightarrow m_5=e^1-1-e^{-1.491951}=1.493332$

经过五轮之后，我们发现 m 的值稳定在 1.493753。

虽说牛顿的迭代法非常的快，但是考虑到某些人并没有学过牛顿约根法，所以我使用了一个

并不涉及到微积分的算法。由此，我们得到一组（m，n），即 $(1.493753;1)$。

c） 由此我们可以定义在任意一个 c 值处的导数都是：

$$e^c = \frac{e^{c+1} - e^{c-1.493753}}{2.493753} \qquad [F]$$

假设 c=1，那么

$$e^1 = \frac{e^2 - e^{-0.493753}}{2.493753} = 2.718251$$

在第四位小数之后的误差是因为我使用了 $e = 2.718268$。
再令 c=10，那么

$$e^{10} = \frac{e^{11} - e^{8.506247}}{2.493753} = 22025.211716$$

注意，公式[F]并不是唯一的。因为有无数组 $(m;n)$ 可以满足割线与切线平行的关系。

## 总结

任何函数的求导都可以通过割线法实现。而任意 c 值上的 $(m;n)$ 也不用取特殊值。由于切线的梯度（gradient）总是通过 $(0;0)$ 这对距离对计算出来的。曲线上的某一个点是唯一能使 $(0;0)$ 这对距离对成立的。

# 新微积分　第二部分：单一变量的积分

## 参考书目


1. *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, 1669, Isaac Newton

2. *The New Calculus*, http://thenewcalculus.weebly.com, 2010, John Gabriel

## 附录 A

定义：

1、 点是一个位置的象征
2、 一条路径描述了两个已知点之间的距离
3、 两个点之间有无数条路径
4、 两点之间直线最短
5、 切线是一条限定的直线，这条线由切点向两边延伸。切线从不穿过平面函数的图像。（如果这条切线穿过了图像，那么它就违背了自己的主要定义。这个定义就是，切线和已知曲线只交于一点。）
6、 如果函数上在 x 两边的每一个点都有切线，唯独 x 自己没有，那么 x 就是这个函数的一个拐点。
7、 一个平面函数：
   a）如果没有断点，在一定的区间内是连续的。
   b）如果在区间上的每一个点都有唯一的切线，并且连续，这个函数在区间内就是光滑的。即使这个区间内存在拐点，它仍然是被定义为一个光滑的区间。
   c）如果在某个区间内这个函数是连续、光滑，而且没有拐点的，那么这个曲线在这个区间内的任意一个点都是可导的。
8、两条或多条路径可以构成一个限定的面。
9、如果面上不存在突出部分（断点或者断线），那么这个面是连续的。
10、如果在面上的某一区域 R 中，每一个 R 值都有一个对应的切面，那么这个面在区间 R 上是连续的。
11、一个几何体由一个或者多个点组成。
12、相切事物是用来测量光滑度的几何体。
13、如果一个限定的相切事物存在，这个相切事物被用于推导它包含的所有点具有一致的光滑度，那么一个限定的高度紧密的立体几何是微分的。

(*)光滑度在不同的维度中又被定义为曲率（curvature）

# 第二部分 单一变量的积分（正文）

## 摘要

新的微积分不会应用到被错误定义的极限的概念、不存在的无穷小以及“无限”的概念。在新微积分里所提及的概念都是能被合理解释的，例如数、平均值、面积、体积。解析几何是新微积分的根基。虽然这部分摘要只跟单一变量微积分的积分有关，但是微积分里包括了多变量和向量的微积分（求导和反导）。这些都是超过这篇摘要的范围的。由于新微积分的理论建立在合理解释的概念之上，所以它并不会产生主流数学中的那些模棱两可、相互矛盾的

东西。新微积分将是人类历史上第一个也是唯一严格构想的微积分。

## 介绍

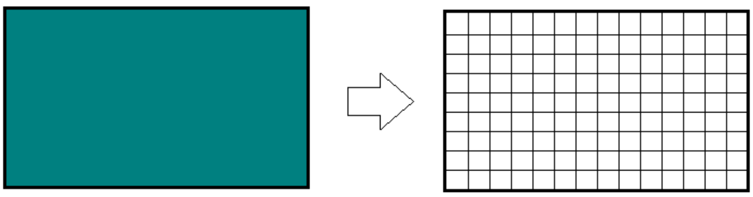
新微积分的积分是从自然平均值中得来的。用一平方或者一立方分别解释面积和体积是一个普遍存在的概念。这样一个概念不但是违反直觉的，而且会导致对面积、体积全方位的理解上的问题。面积或体积是两个或者三个平均值的乘积。面积和体积是自然定义，这个定义并没有把几何图形和平方或者立方联系到一起，尽管依据这些，它们可以被理解。了解更多请看附录 A。

一个自然平均值基于不可分割的概念。阿基米德通过穷竭法（method of exhaustion）或者叫做等量分割法（method of equal partition）来估算面积和体积。而这也导致了卡瓦列里（Cavalieri）的关于不可分割的概念诞生。在新微积分中，自然平均值和不可分割都是很好地被解释了的定义。这份论文创建了不需要使用极限、无穷或者不存在的无穷小概念的积分方法。文章将由面积切入，但也可以轻易的把概念转化到体积和高度密集的体积（hyper volume）

(*)穷竭法是基于使用等量分割法把变量同化成离散的值的平均值的方法。

## 历史背景

第一个关于面积的概念是从欧几里德元素中发现的。接下来提到的事件也许对读者来说会是一个不小的震惊，古希腊数学家从没有正式的定义过面积。他们认为面积是由四个角相同的平行四边形（即四个角都是直角的平行四边形）围成的封闭的区域。一个平行四边形的主要性质就是它每条边的长度，即水平和竖直的边都要在固定的位置上。



这些边都是自然平均值，自然平均值的概念将在下文阐述：
水平方向上的边的长度就是这个平行四边形中水平方向上无数条边的长度的平均值，竖直方向上的长度也就是这个平行四边形竖直方向上无数条边的长度的平均值。见图一：

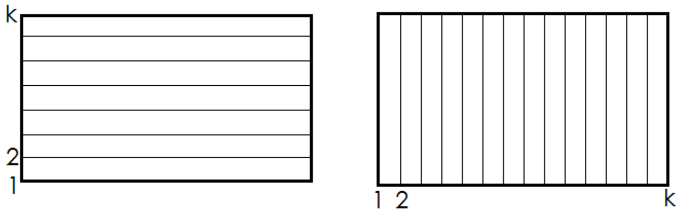



Fig. 1

水平方向上的平均值是：$\dfrac{kw}{k} = w$ 其中 $w$ 是每一条水平线的长度。

同样的，竖直方向上的平均值是：$\dfrac{kh}{k} = h$ 其中 $h$ 是每一条竖直线的长度。

显而易见，w 和 h 分别是水平和竖直方向上边的平均值。面积即是这两个平均值的乘积。即，$A = wh$。如果欧几里德用这种方式来定义面积，那么他将会完成的很好。

猜想区域内有无数多条线，每条线和平行四边形的某一个角都有着独一无二的位置关系。在这种情况下，概念就自然而然的产生了。设定线只有长度，没有宽度或者是厚度。因此，一个不可分割的事物指代了线到平行四边形某一定点的具体距离。如果你已经了解了标准微积分，那么下面的链接可以告诉你更多：

Indivisibles and the Mean Value Theorem

不同于学术观点，面积或者体积跟线的宽度或者平面的厚度无关。

穷竭法直接基于这个概念。在新微积分出现之前，并不是每一个函数都可以被积分的。因此，为了计算一个不规则平面图形的自然平均值，我们可以通过把图形分割成相等的部分，即，把横竖线等距排布，来获得一个估值。见图二：

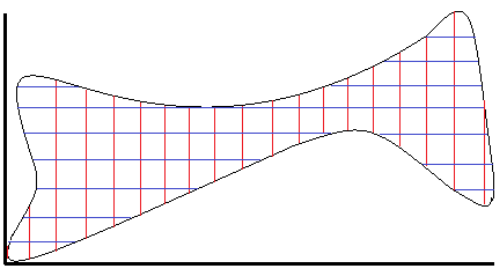


Fig. 2

在新微积分中，每一个函数都可以通过不定积分的系统法则进行积分。接下来的部分说明了这个。在进入系统法则的学习之前，你可能需要阅读以下文件：

Systematic integration of indefinite integrals in the New Calculus

和学术观点不同，在新微积分中，穷竭法和一切具有无穷观点的概念没有联系。

任何平面图形的面积可以写作：

$A = wh$

h 和 w 分别是无数条水平线、竖直线的长度平均值。假设 w 是给定区域中一个定值长度，即，所有水平线的长度平均值是 w。那么平均的竖直长度 h 就是：

$$h = \frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1} f'(\mu_s) \qquad \text{[AS]}$$

由于这里存在着无数多个不确定的纵坐标 $f'(\mu_s)$。我们用新微积分定义这个纵坐标就是：

$$f'(c) = \frac{f(c+n) - f(c-m)}{m+n}$$

用 $\mu_s$ 替代 c。$\mu_s$ 是每一个亚区间的中值。每一个亚区间的长度可以被看作 $\dfrac{m+n}{k}$。m 和 n 是 c 两边的距离，所以 $c-m<c<c+n$，在 $(c-m, c+n)$ 区间上的任何一个值都要满足这个不等式。

因此

$$f'(\mu_s) = \frac{f\left(\frac{(m+n)(s+1)}{k}\right) - f\left(\frac{(m+n)s}{k}\right)}{\frac{m+n}{k}}$$

我在求这些结果的过程中并没有使用到中值定理（mean value theory），相反，我用的是新微积分里关于求导的定义去算得的[AS]。

因此，每一个被定义为 $(\mu_s + n_s; \mu_s - m_s)$ 的亚区间可以用 m、n、k、s 来表示。

$$\left(\frac{(m+n)(s+1)}{k}; \frac{(m+n)s}{k}\right)$$

其中：

$$\mu_s + n_s = \frac{(m+n)(s+1)}{k} \qquad \mu_s - m_s = \frac{(m+n)s}{k}$$

因此有：

$$h = \frac{1}{k}\left\{ f'(\mu_0) + f'(\mu_1) + f'(\mu_2) + \ldots + f'(\mu_{k-1}) \right\}$$

$$\rightarrow h=\frac{1}{k}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{f\left(\dfrac{m+n}{k}\right)-f(0)}{\dfrac{m+n}{k}}+\dfrac{f\left(\dfrac{2(m+n)}{k}\right)-f\left(\dfrac{m+n}{k}\right)}{\dfrac{m+n}{k}}+\dfrac{f\left(\dfrac{3(m+n)}{k}\right)-f\left(\dfrac{2(m+n)}{k}\right)}{\dfrac{m+n}{k}}+\\ ..+\dfrac{f(m+n)-f\left(\dfrac{(k-1)(m+n)}{k}\right)}{\dfrac{m+n}{k}}\end{array}\right\}$$

$$\rightarrow h=\frac{1}{k}\left\{\frac{f(m+n)-f(0)}{\dfrac{m+n}{k}}\right\}=\frac{f(m+n)-f(0)}{m+n}$$

令 $c_x-m=0$，则有 $m+n=c_x-m+(m+n)=c_x+n$。

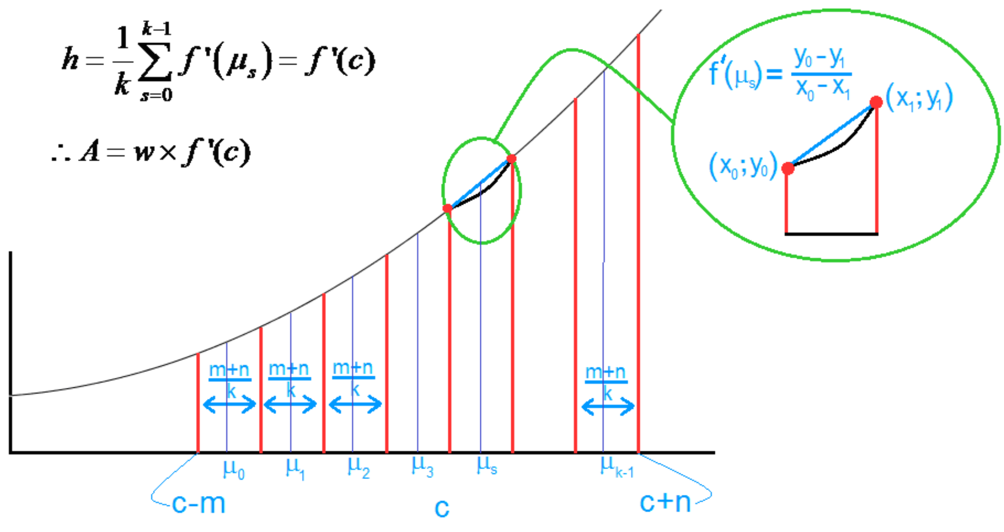
因此有 $\rightarrow h=\dfrac{f(c+n)-f(c-m)}{m+n}$

这就是我们在一开始提到的：

$$f'(c)=\frac{f(c+n)-f(c-m)}{m+n}$$

因此，$h=f'(c)$。根据观察，k 值不会影响平均值 h。现在，我们知道无数条竖直线的平均值是 h。我们可以用 $A=wh$ 或者 $A=w\times f'(c)$ 来求出面积。（注：$w=m+n$）见图三：

Fig. 3




c is the abscissa of the mean value.

由 $A=w\times f'(c)$，我们可以得出

$$A=wh=\frac{w}{k}\sum_{s=0}^{k-1}f'(\mu_s)=w\times f'(c)$$

假设导函数 $f'$ 的原式函数是 $f$。那么存在下式：

$$\frac{f(x+w)-f(x)}{w}=\frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1} f'(\mu_s) \quad \text{[MVT]}$$

$$\to f(x+w)-f(x)=\frac{w}{k}\sum_{s=0}^{k-1} f'(\mu_s) \quad \text{[F]}$$

后者是一个由中值定理直接得到的微积分基本理论。[F]通常被写作：

$$f(x+w)-f(x)=\int_x^{x+w} f'(x)dx \quad \text{[FTOC]}$$

不需要使用极限的有关中值定理和微积分基本定理的证明在下面的链接当中：

New Calculus proof of Mean Value Theorem and Fundamental Theorem of Calculus

我向那些已经了解了标准微积分的读者推荐下面这篇文章：

What exactly does Leibniz notation mean?

[FTOC]的等号右边是两个平均值的乘积。我们把这两个平均值暂且称作 w 和 h。

$$w=dx \qquad h=\frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1} f'(\mu_s)=\frac{1}{w}\int_x^{x+w} f'(x)\approx\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} f'\left(x+\frac{ws}{n}\right)$$

因此有：

$$A=wh=w\times\frac{1}{w}\int_x^{x+w} f'(x)=\int_x^{x+w} f'(x)dx$$

不难看出，标准微积分中的表达式$\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} f'\left(x+\frac{ws}{n}\right)$由于引入了极限的概念，所以只是一个估值。

莱布尼茨使用的积分方程并不是我们今天所使用的那种。他当时使用的是$\int f'(x)$。如果莱布尼茨认识到所有积分都是点和线的积分，那么他会得出这个公式$\int_x^{x+w} f'(x)dx$。在莱布尼茨的所有作品中，他都省略掉了 $dx$。实际上，他认识中的积分并不是十分清晰的。所有积分都是线的积分这个概念在我二十一世纪的发现之前都是未知的。

我向那些已经学习过微积分的读者推荐下面的文章：

The meaning of dy and dx

Comparing differentials: dy and dx

Examples of related rates

公式[F]定义了自然积分。它证明了不存在无数多个面积和能趋于某个极限的长方形（这是二十世纪时的一个错误概念）。相反，面积，正如我之前提到的，是两个平均值的乘积。

[F]公式的右半边应该是 $\int_{x}^{x+w} f'(x)dx$，所以

$$f(x+w)-f(x)=\int_{x}^{x+w} f'(x)dx \qquad \text{[FS]}$$

在新微积分中的中值定理和微积分基本方程都可以在不使用极限的情况下表示出来：

$$A=f(x+n)-f(x-m)=\frac{m+n}{k}\sum_{s=0}^{k-1} f'(\mu_s)$$

$$f'(\mu_s)=\frac{f\left(x-m+\dfrac{(m+n)(s+1)}{k}\right)-f\left(x-m+\dfrac{(m+n)s}{k}\right)}{\dfrac{m+n}{k}}$$

## 一些学术上的错误概念

微积分的基本方程**就是**中值定理。我们今天所熟知的微积分基本方程是中值定理一个直接的结论。他的形式就是[FS]中表现的那样，而不是像某些教材里提到的有两种表达形式（例如 Stewart’s calculus）那是一本由对微积分不是很了解的学者写的书。

平均值定理**就是**中值定理而不是像以往认为的是一个分支定理。通常 $\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f'(x)dx$ 是[FS]的右边除以区间宽度的值，即平均值。令 $w=b-a$，那么有 $x=a$ 和 $x+w=b-a+a=b$。

因此 $\frac{1}{w}\int_{x}^{x+w} f'(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f'(x)dx$

因此积分的中值定理就仅仅是变化了形式而已：$\int_{a}^{b} f'(x)dx=f'(c)(b-a)$ [MVTI]

我们所熟知的[GS]是：

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f'(x)dx$$

它也可以转换成下面的形式

$$f'(c)(b-a)=\int_a^b f'(x)dx$$

如果读到这里，前面的东西你都能理解。那你应该会同意现在几乎所有的数学教授都错误的理解了微积分的基本事实。广义积分（improper integral）是一个不合理的概念，由于无限（infinite）不是一个数字。$1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ 的意义就是正态密度函数（normal density function）和 x 轴围成的面积不大于 1。这个积分的值的计算在有限积分之外，因为由无数个数或纵坐标得到的平均值只存在于有限区间之中。这句话的意思就是，标准面积公式 $A=wh$ 在 w 或者 h 的值无法确定的时候就会失效。如果区间 w 变得无限大（这是一个错误的概念）h 变得无穷小（这也是一个错误的概念）。那么由错误的标准公式求出来的东西也必将失去效益。

## 总结

从中值定理[MVT]我们认识到积分的两个方面：

1、 求导的逆过程或者不定积分：应用新微积分可以找到任意一个函数的积分

2、 面积可以通过给原函数定平面区域边界的纵坐标差来表述（通过一个定长的无数个横线长度的平均值）。

## 新微积分第三部分：多个变量的微分

参考书目：1. *The New Calculus*, http://thenewcalculus.weebly.com, 2010, John Gabriel

附录 A

面积可以通过不同的几何图形描述出来，也不需要使用单位来表示。这表示，面积可以在不使用尺度的条件下表示为两个平均值的乘积。假设一个长方形的面积长是 m 米，宽是 n 英寸。它的面积可以表示为 ***m*n***。如果长是 r 米宽是 s 英寸，那么它的面积可以表示为 $rs$ (m$\times$inch)。这种情况下几何事物被用于描述一个两条边长是 r，另两条边长是 s 的长方形的面积。

三角形可以被用作于面积测量。要理解这个，首先认识到如果一块面积可以被表示成数个平方单位，那么同样一块面积可以表示成两倍数量的三角形单位。每一个三角形单位的三角形都是等腰三角形。

当了解了三角形单位之后，用圆单位来表述一块面积就是可能的了。在此我留下一个练习：线索：看阿基米德作品中的漩涡面积（spiral proportion）